

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour

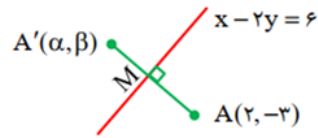


کلیک کن وباماهمراه شو!

قرینه نقطه $A(2, -3)$ را نسبت به خط $x - 2y = 6$ نقطه $A'(\alpha, \beta)$ می‌نامیم. خط $x - 2y = 6$ عمودمنصف پاره‌خط AA' است. شیب خط گذرا بر AA' قرینه و معکوس شیب عمودمنصف است.

$$x - 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{AA'} = -2$$

$$AA' \text{ معادله: } y + 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 1$$



M محل تلاقی دو خط عمود بر هم است.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x - 3 = -2x + 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = -\frac{11}{5}$$

M وسط AA' است.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha + 2}{2} &= \frac{8}{5} \rightarrow \alpha = \frac{6}{5} \\ \frac{\beta - 3}{2} &= -\frac{11}{5} \rightarrow \beta = -\frac{7}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{1}{5}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

اولاً دو خط بر هم عمودند، زیرا:

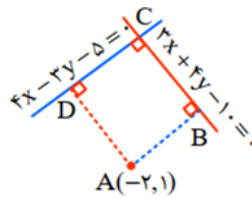
$$\left. \begin{aligned} 4x - 3y - 5 = 0 : m = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ 3x + 4y - 10 = 0 : m' = \frac{-3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow mm' = -1$$

ثانیاً نقطه $A(-2, 1)$ روی هیچ‌یک از خطوط قرار ندارد. زیرا مختصاتش در هیچ‌یک صدق نمی‌کند. پس مطابق شکل، داریم:

$$AB = \frac{|-6 + 4 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{12}{5}$$

$$AD = \frac{|-8 - 3 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{16}{5}$$

$$S_{ABCD} = AB \times AD = \frac{12}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{192}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{768}{100} = 7 \frac{68}{100}$$



و در نهایت مساحت مستطیل، برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\begin{cases} AB: x + 2y = 3 \\ AC: y = 2x - 1 \\ BC: x + y = 4 \end{cases}$$

ابتدا با حل دستگاه معادلات خطوط AB و AC، مختصات نقطه A را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1)$$

اینک با محاسبه فاصله رأس A از ضلع BC، اندازه ارتفاع AH حاصل می‌شود:

$$A(1, 1), BC: x + y - 4 = 0$$

$$AH = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

هم‌اکنون با حل دستگاه معادلات خطوط AB و BC، مختصات نقطه B و با حل دستگاه معادلات خطوط AC و BC، مختصات نقطه C را بدست می‌آوریم تا بتوانیم مختصات نقطه M وسط ضلع BC را تعیین کنیم:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(5, -1) \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

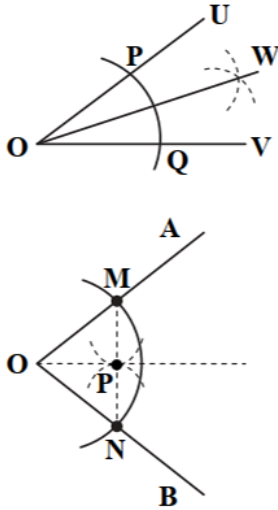
$$\Rightarrow M\left(\frac{5 + \frac{5}{3}}{2}, \frac{-1 + \frac{7}{3}}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

و آن‌گاه اندازه میانه AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{\left(1 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

و در نهایت نسبت طول میانه AM به طول ارتفاع AH برابر $\frac{5}{3}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: برای رسم نیمساز زاویه UOV، به مرکز O و شعاع دلخواه کمائی رسم می‌کنیم تا OU و OV را در P و Q قطع کند. سپس دهانه پُرگار را بیشتر از نصف PQ باز می‌کنیم و به مرکزهای P و Q دو کمان رسم می‌کنیم تا از برخورد آن‌ها نقطه W پدید آید. پاره خط OW نیمساز زاویه UOV است.

زاویه $\hat{AOB}$ برابر 60° است و چون $OM = ON$ است، پس مثلث MON متساوی‌الساقین است که زاویه رأس آن 60° است. بنابراین مثلث MON متساوی‌الاضلاع خواهد بود و $OM = ON = MN$. بنابراین $MN = 20$ است.

اگر بخواهیم از M و N دو کمان رسم کنیم تا یکدیگر را قطع کنند، حداقل شعاع لازم برابر نصف MN است تا این دو کمان به یکدیگر در نقطه P روی MN مماس شوند و پاره خط OP نیمساز $\hat{AOB}$ خواهد بود، بنابراین حداقل شعاع لازم برابر است با:

$$MP = NP = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با: $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

در مستطیل، اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند (شیب‌ها برابر) و اضلاع مجاور برهم عمودند (شیب‌ها قرینه و معکوس هم است).

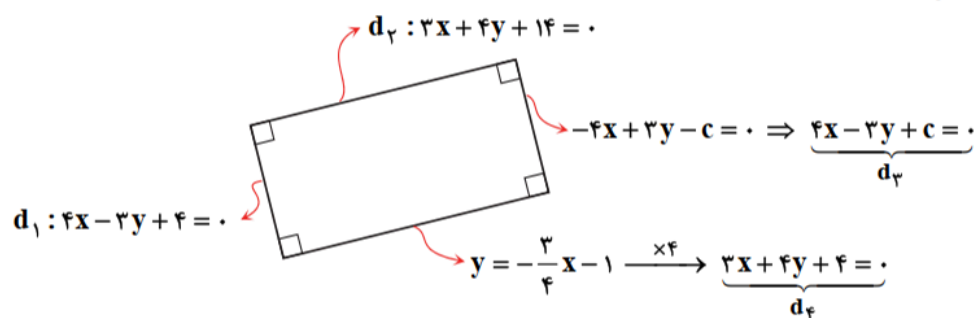
شیب دو خط $3x + 4y + 14 = 0$ و $y = \frac{-3}{4}x - 1$ برابر است (هر دو $\frac{-3}{4}$ است). پس این دو خط، دو ضلع روبه‌روی هم در مستطیل هستند.

دو ضلع دیگر بر این دو خط عمودند، پس شیب‌هایشان باید $\frac{4}{3} +$ باشد.

شیب $ax - 3y = b$ باید $\frac{4}{3}$ باشد: $\frac{a}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4$.

شیب $bx + 3y = c$ هم باید $\frac{4}{3}$ باشد: $\frac{-b}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = -4$.

یک شکل فرضی برای این مستطیل رسم می‌کنیم:



فاصله d_1 تا d_3 را محاسبه می‌کنیم: $\frac{|4 - c|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4 - c|}{5}$.

فاصله d_2 تا d_4 را محاسبه می‌کنیم: $\frac{|14 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

مساحت مستطیل ۱۴ است، پس:

$$2 \times \frac{|c - 4|}{5} = 14 \Rightarrow |c - 4| = 35 \Rightarrow \begin{cases} c - 4 = 35 \Rightarrow c = 39 \\ c - 4 = -35 \Rightarrow c = -31 \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: فاصله نقطه $A(x_o, y_o)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

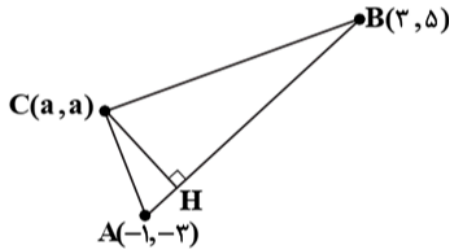
نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: شیب خط گذرا از دو نقطه غیرهم طول A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

طول پاره خط AB برابر است با:



$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

نقطه C روی نیمساز ربع سوم قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $C(a, a)$ است که در آن a عددی منفی است. برای یافتن طول ارتفاع CH ، باید معادله خط AB را پیدا کنیم. شیب این خط برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 + 3}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین معادله خط AB به صورت $y = 2x + b$ است که این خط از نقطه $B(3, 5)$ می‌گذرد، پس:

$$5 = 2 \times 3 + b \Rightarrow b = -1$$

پس معادله خط AB به صورت $y = 2x - 1$ یا $2x - y - 1 = 0$ است.

فاصله نقطه $C(a, a)$ از خط AB برابر است با:

$$CH = \frac{|2a - a - 1|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|a - 1|}{\sqrt{5}}$$

مساحت مثلث ABC برابر ۸ است، پس:

$$\frac{AB \times CH}{2} = 8 \Rightarrow 4\sqrt{5} \times \frac{|a - 1|}{\sqrt{5}} = 16$$

$$\Rightarrow |a - 1| = 4 \Rightarrow a - 1 = \pm 4 \Rightarrow a = 5 \text{ یا } a = -3$$

نقطه C در ربع سوم قرار دارد، یعنی فقط مقدار منفی a قابل قبول است، یعنی $a = -3$ و مختصات C به صورت $C(-3, -3)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = -x^2 + \lambda x + k \rightarrow x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-\lambda}{-2} = \frac{\lambda}{2}$$

با توجه به اینکه طول رأس میانگین ریشه‌هاست و $OA = AB$ است، پس $x_A = 2$ و $x_C = 6$ است.

با معلوم بودن دو ریشه، معادله درجه دوم را می‌نویسیم:

$$y = a(x - x_A)(x - x_C) = a(x - 2)(x - 6)$$

با توجه به صورت سوال $a = -1$ است، بنابراین داریم:

$$y = -(x - 2)(x - 6) \xrightarrow{x_B=4} y_B = -(4 - 2)(4 - 6) = 4$$

$$\rightarrow x_B \times y_B = 4 \times 4 = 16$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا مختصات رأس A را یافته و سپس از ویژگی عمود بودن اضلاع استفاده کنید. **سرنخ**

$$B(0, -2), D(-7, -5), C(a, 0)$$

مجموع مختصات دو رأس مقابل هم برابرند.

$$\begin{cases} y_B + y_D = y_A + y_C \Rightarrow -2 - 5 = y_A + 0 \Rightarrow y_A = -7 \\ x_B + x_D = x_A + x_C \Rightarrow 0 - 7 = x_A + a \Rightarrow x_A = -7 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(-7 - a, -7) \xrightarrow{\text{طبق شکل}} x_A < x_C \rightarrow -7 - a < a \rightarrow a > -\frac{7}{2}$$

$$m_{AD} \times m_{AB} = -1 \Rightarrow \frac{-5 + 7}{-7 + 7 + a} \times \frac{-2 + 7}{0 + 7 + a} = -1 \rightarrow \frac{2}{a} \times \frac{5}{7 + a} = -1 \Rightarrow a(7 + a) = -10 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \quad \checkmark \\ a = -5 \quad \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(-5, -7) \\ D(-7, -5) \end{cases} \Rightarrow AD: y = -x - 12 \xrightarrow{x=0} y = -12$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با داشتن مساحت و قاعده مثلث، ارتفاع مثلث را که همان ریشه معادله $x = f^{-1}(x)$ است، پیدا کنید.

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{a, b > 0} f(0) = b \quad (fof)(x) = a^2x + ab + b \quad (fof)(0) = ab + b = 3 \rightarrow b = \frac{3}{a+1}$$

نقطه تلاقی f و f^{-1} روی خط $y = x$ است، بنابراین:

$$x = f^{-1}(x) = f(x) \rightarrow x = ax + b \rightarrow x = \frac{b}{1-a}$$

$$\text{مساحت مثلث} = (fof)(0) - f(0) = 3 - b = 3 - \frac{3}{a+1} = \frac{3a}{a+1}$$

$$AH = \text{ارتفاع مثلث} = \left| \frac{b}{1-a} \right| = \frac{-b}{1-a} = \frac{-3}{1-a^2}$$

$$\text{مساحت مثلث} = 1 = \frac{\left(\frac{3a}{a+1} \right) \left(\frac{-3}{1-a^2} \right)}{2} = \frac{-9a}{2(a+1)(1-a^2)} \rightarrow 2(a+1)(1-a^2) = -9a \rightarrow 2a^3 + 2a^2 - 11a - 2 = 0$$

$$\rightarrow (a-2)(2a^2 + 6a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a-2=0 \rightarrow a=2 \checkmark \\ 2a^2 + 6a + 1=0 \rightarrow \begin{cases} S=-3 \\ P=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها هم علامت و منفی است}} a < 0 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$a=2 \rightarrow b = \frac{3}{2+1} = 1$$

بنابراین ریشه معادله $x = f^{-1}(x)$ برابر با $x = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-2} = -1$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

سرنخ کافیه محل هم‌رسی عمود منصف‌ها را پیدا کنید.

مرکز دایره محیطی در هر مثلث دلخواه، همان محل هم‌رسی عمود منصف‌هاست. پس باید محل برخورد عمود منصف اضلاع AB و AC را پیدا کنیم. اگر M_1 وسط ضلع AB و M_2 وسط ضلع AC باشد، داریم:

$$(1) \begin{cases} m_{AB} = \frac{3-2}{-1-0} = -1 \\ M_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \text{عمود منصف AB: } y - \frac{5}{2} = 1 \times \left(x + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = x + 3$$

$$(2) \begin{cases} m_{AC} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3} \\ M_2 \left(\frac{3}{2}, 1 \right) \end{cases} \Rightarrow \text{عمود منصف AC: } y - 1 = \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

حال برای پیدا کردن محل برخورد عمود منصف‌ها داریم:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 8/5, y = 11/5 \Rightarrow O(8/5, 11/5)$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

دو خط $ax + by = -n$ و $4y + 3x = 12$ با هم موازی‌اند.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \end{cases} \rightarrow 3kx + 4ky = -n \rightarrow 3x + 4y = \frac{-n}{k}$$

چون ضلع AB بالاتر از ضلع CD است، باید $\frac{-n}{k} > 12$ باشد، از طرفی طول ضلع مربع برابر ۵ است، پس باید فاصله دو ضلع مربع نیز برابر ۵ باشد:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \frac{n}{k} = 0 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{\left| \frac{n}{k} + 12 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \rightarrow \left| \frac{n}{k} + 12 \right| = 25$$

$$\xrightarrow{\frac{-n}{k} > 12} \frac{n}{k} + 12 < 0 \rightarrow -\left(\frac{n}{k} + 12 \right) = 25 \rightarrow \frac{n}{k} = -37 \rightarrow n = -37k \xrightarrow{k=-1} n = 37$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲

نقطه مفروض را (x, y) در نظر می‌گیریم و فاصله آن را از خط و نقطه وارده شده محاسبه و برابر می‌گذاریم.

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2} = \frac{|3x+4y+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + (|x|-1-5)^2} = \frac{|3x+4(|x|+1)+5|}{5}$$

به جای y عبارت $|x|+1$ را جایگذاری می‌کنیم.

برای $x \geq 0$ و $x < 0$ به ترتیب داریم:

$$x \geq 0 \rightarrow x^2 + (x-6)^2 = \frac{(7x+9)^2}{25} \rightarrow 50x^2 - 300x + 900 = 4x^2 + 81 + 126x$$

$$\rightarrow x^2 - 426x + 819 = 0$$

$$x < 0 \rightarrow x^2 + (-x-6)^2 = \frac{(-x+9)^2}{25} \rightarrow 50x^2 + 300x + 900 = x^2 - 18x + 81$$

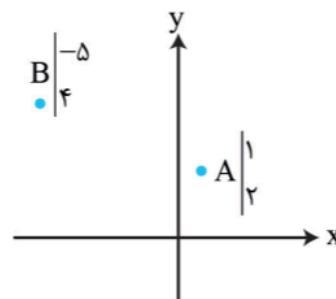
$$46x^2 + 318x + 819 = 0$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$M = \frac{A+B}{2} = (-2, 3)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{-5-1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m' = 3$$

معادله عمودمنصف: $y = 3x + 9$



C روی عمودمنصف AB است:

۱۳

پس مختصات C به صورت $(\alpha, 3\alpha+9)$ است.

C باید از A به فاصله $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$ باشد:

$$AC = \sqrt{(3\alpha+9-2)^2 + (\alpha-1)^2} = \sqrt{40} \Rightarrow$$

$$(3\alpha+7)^2 + (\alpha-1)^2 = 40 \Rightarrow 10\alpha^2 + 40\alpha + 50 = 40$$

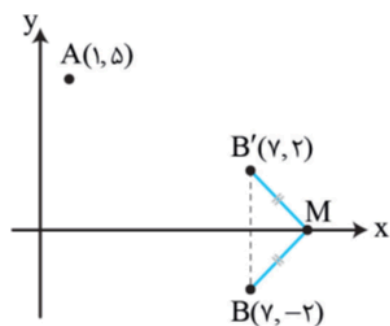
$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow[\alpha < -2]{y_C > 0} C \begin{cases} -2 + \sqrt{3} \\ 3 + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = -x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به}} C' \begin{cases} -(3 + 3\sqrt{3}) \\ -(-2 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$y_{C'} = 2 - \sqrt{3}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴



اگر نقطه B را نسبت به محور x قرینه کنیم، داریم:

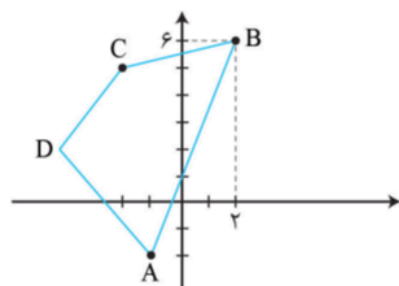
برای این که $MA - MB'$ ماکزیمم شود باید A، B' و M در یک امتداد باشند پس معادله AB' را می‌نویسیم و نقطه M را پیدا می‌کنیم:

$$m_{AB'} = \frac{2-5}{7-1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AB': y-5 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\xrightarrow{y_M=0} -5 = -\frac{1}{2}(x_M-1) \Rightarrow x_M-1=10$$

$$\Rightarrow x_M = 11$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



این دوزنقه نصف یک شش ضلعی منتظم به طول قطر بزرگ $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} = 5$ است.

طول ضلع این شش ضلعی $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ و طول قطر کوچک آن $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ است.

فاصله دو خط موازی AB و CD برابر $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ است. معادله خط AB را می‌یابیم.

$$m_{AB} = \frac{4}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \xrightarrow{\times 3} 4x - 3y + 10 = 0$$

ضابطه خط CD نیز $4x - 3y + k = 0$ در نظر می‌گیریم. فاصله دو خط موازی را برابر $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ می‌گذاریم.

$$\frac{|k-10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{4}\sqrt{3} \rightarrow |k-10| = \frac{25}{4}\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 10 + \frac{25}{4}\sqrt{3} \\ k_2 = 10 - \frac{25}{4}\sqrt{3} \end{cases}$$

مقدار $4x_C - 3y_C$ برابر $-k_1$ یا $-k_2$ است یعنی $-10 - \frac{25}{4}\sqrt{3}$ یا $-10 + \frac{25}{4}\sqrt{3}$.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

شیب ارتفاع وارد بر هر ضلع، معکوس و قرینه‌ی شیب آن ضلع است. پس اگر می‌خواهیم شیب ارتفاع مثبت باشد، شیب ضلع باید منفی شود. پس داریم:

$$3x + 4y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{4} \rightarrow m_{\text{ارتفاع}} = \frac{4}{3}$$

برای نوشتن معادله ارتفاع، یک نقطه را نیز می‌خواهیم که محل برخورد دو ضلع دیگر است:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 2 \end{cases} \rightarrow 2x - 2 = x \rightarrow x_A = 2, y_A = 2 \rightarrow A(2, 2) \rightarrow \text{معادله ارتفاع AH} \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

دو رأس دیگر مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{3}{4}x + 1 \end{cases} \rightarrow 2x - 2 = -\frac{3}{4}x + 1 \rightarrow x_B = \frac{12}{11}, y_B = \frac{2}{11} \rightarrow B\left(\frac{12}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{3}{4}x + 1 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{3}{4}x + 1 \rightarrow x_C = \frac{4}{7}, y_C = \frac{4}{7} \rightarrow C\left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

حال فاصله هر دو رأس را از ارتفاع AH محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فاصله AH تا B} = \frac{\left| 4\left(\frac{12}{11}\right) - 3\left(\frac{2}{11}\right) - 2 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$

$$\text{فاصله AH تا C} = \frac{\left| 4\left(\frac{4}{7}\right) - 3\left(\frac{4}{7}\right) - 2 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

چون $\frac{4}{11} > \frac{2}{7}$ رأس C به ارتفاع AH نزدیکتر است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: شیب نیمساز ربع دوم و چهارم، ۱- است؛ پس معادله خط d که موازی آن است را می توان به صورت $y = -x + h$ نوشت.

گام دوم: اگر طول نقطه A روی خط d را α در نظر بگیریم، عرض آن $-\alpha + h$ می شود؛ پس $A(\alpha, -\alpha + h)$ است.

گام سوم: فاصله نقطه A تا دو نقطه $B(2, 6)$ و $C(-3, 1)$ را نوشته و به ترتیب برابر با $\sqrt{10}$ و $2\sqrt{5}$ قرار می دهیم.

$$AB = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (-\alpha + h - 6)^2} = \sqrt{10} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - 2)^2 + (\alpha - h + 6)^2 = 10 \quad (۱)$$

$$AC = \sqrt{(\alpha + 3)^2 + (-\alpha + h - 1)^2} = 2\sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha + 3)^2 + (\alpha - h + 1)^2 = 20 \quad (۲)$$

گام چهارم: با تغییر متغیر $M = \alpha - 2$ و $N = \alpha - h + 6$ ، نتیجه می گیریم: $M + 5 = \alpha + 3$ و $N - 5 = \alpha - h + 1$ و معادله های (۱) و

(۲) را بازنویسی می کنیم.

$$M^2 + N^2 = 10 \quad (۳)$$

$$(M + 5)^2 + (N - 5)^2 = 20 \Rightarrow M^2 + 10M + 25 + N^2 - 10N + 25 = 20$$

$$\Rightarrow M^2 + N^2 + 10(M - N) = -30 \xrightarrow{(۳)} 10 + 10(M - N) = -30 \Rightarrow 10(M - N) = -40 \Rightarrow M - N = -4$$

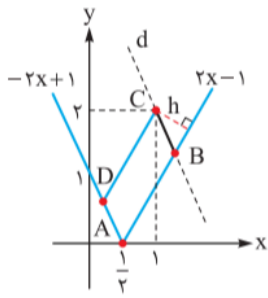
$$h - 8 = -4 \Rightarrow h = 4$$

از طرفی $M - N = \alpha - 2 - (\alpha - h + 6) = h - 8$ است؛ پس:

پس عرض از مبدأ خط d برابر با ۴ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: متوازی الاضلاع را رسم می کنیم.



$$y = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & , \frac{1}{2} \leq x \\ -2x + 1 & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

گام دوم: ارتفاع متوازی الاضلاع را که برابر با فاصله نقطه $C(1, 2)$ از خط $y = 2x - 1$ است، به دست می آوریم.

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y - 2x + 1 = 0$$

$$h = \frac{|2 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

گام سوم: خط d از نقطه $C(1, 2)$ عبور می کند و با خط $y = -2x + 1$ موازی است؛ پس شیب آن برابر با -2 است. معادله خط d را می نویسیم.

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$$

گام چهارم: از تقاطع خط d با خط $y = 2x - 1$ ، مختصات نقطه B به دست می آید.

$$-2x + 4 = 2x - 1 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}, y = 2 \times \frac{5}{4} - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

گام پنجم: طول ضلع AB از متوازی الاضلاع را به دست می آوریم:

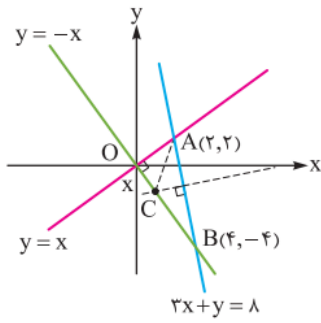
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$S = h \times AB = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

گام ششم: مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا خط $3x + y = 8$ و نیمساز ربع اول و سوم و نیمساز ربع دوم و چهارم را رسم می‌کنیم و مختصات نقاط A و B را به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x + x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 3x - x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4, -4)$$

گام دوم: مثلث OAB قائم‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع AB ، ضلع OB را در نقطه C قطع می‌کند، در نتیجه از آن جایی که $\hat{CAB} = \hat{B}$ است، پس $\hat{OAC} = \hat{A} - \hat{B}$ است؛ پس کافی است $\tan(\hat{OAC})$ را حساب کنیم.

گام سوم: با فرض $OC = x$ و از آن جایی که $OB = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ است؛ پس:
از طرفی طبق خواص عمودمنصف $AC = BC$ است؛ پس $AC = 4\sqrt{2} - x$ می‌شود.

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویه OAC رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم. توجه کنید که $OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ است.

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 \Rightarrow (4\sqrt{2} - x)^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 \Rightarrow 32 - 8\sqrt{2}x + x^2 = 8 + x^2$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{2}x = 24 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(\hat{OAC}) = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \tan(A - B) = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

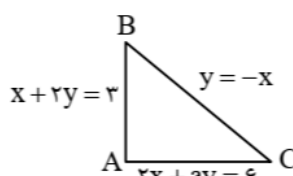
گام پنجم: حالا $\tan(\hat{OAC})$ را حساب می‌کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

مرکز دایره محیطی بر وسط ضلع BC واقع است، پس زاویه A قائمه است.

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{قائمۀ } \hat{A}} m_{AC} = 2 \Rightarrow -\frac{2}{a} = 2$$

$$\Rightarrow a = -1$$



اکنون با داشتن معادله خط AB، AC و BC، نقطه‌های تقاطع آن‌ها یعنی A، B و C را به دست می‌آوریم:

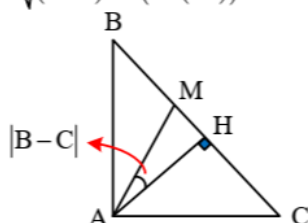
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -2 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = -3, y = 3 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

حال طول خطوط AB و AC را می‌یابیم.

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3-3)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{(2-3)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB > AC$$



پس میانه AM به رأس B و ارتفاع AH به رأس C نزدیک‌تر است. یعنی:

دقت شود که زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با اختلاف ۲ زاویه حاده یعنی $|B-C|$.

پس داریم:

$$\cot |B-C| = \frac{AH}{MH}$$

پس باید AH و MH را محاسبه کنیم:

$$AH \rightarrow \text{فاصله رأس A از ضلع BC} = \frac{|3+0|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

برای محاسبه MH داریم:

$$BC = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-2-3)^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow AM = BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{ABH} : AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow BH = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

پس MH برابر است با:

$$MH = BH - BM = \frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

پس:

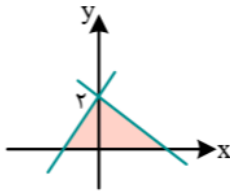
$$\cot |B-C| = \frac{AH}{MH} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

دقت شود که چون $AB > AC$ ، پس $\hat{C} > \hat{B}$ ، پس $\cot(\hat{B} - \hat{C}) = -\frac{3}{4}$ منفی خواهد بود. پس:

نیم‌نظره: البته در تمامی گزینه‌ها از مقادیر منفی استفاده شده است، پس با اطمینان خاطر گزینه ۲ را انتخاب می‌کنیم.

اگر معادله هر دو خط را به شکل استاندارد در بیاوریم، به صورت زیر خواهند شد:

$$y = \frac{4}{m}x + 2, \quad y = (1-m)x + 2$$



بنابراین، عرض از مبدأ هر دو خط برابر ۲ است. پس نمودار آن‌ها به شکل زیر خواهد بود:

پس در مثلث مذکور ارتفاع ۲ واحد و قاعده فاصله بین نقاط برخورد خطوط با محور x ها (یا همان طول از مبدأها) است. پس طول از مبدأها

را به دست می‌آوریم. برای این کار در هر خط مقدار y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{4}{m}x + 2 = 0 \Rightarrow \frac{4}{m}x = -2 \Rightarrow x = -\frac{m}{2}$$

$$y = (1-m)x + 2 = 0 \Rightarrow (1-m)x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{m-1}$$

چون نمی‌دانیم کدام طول از مبدأ، از دیگری بزرگ‌تر است، فاصله آن‌ها را از هم با قدرمطلق اندازه‌گیری می‌کنیم:

$$\text{مثلث قاعده} = \left| \frac{2}{m-1} - \left(-\frac{m}{2}\right) \right| \xrightarrow{\text{مساحت مثلث}} \frac{\left| \frac{2}{m-1} + \frac{m}{2} \right| \times 2}{2} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \left| \frac{4+m^2-m}{2(m-1)} \right| = \frac{\Delta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2-m+4}{m-1} = \pm \Delta \Rightarrow \begin{cases} m^2-m+4 = \Delta m - \Delta \Rightarrow m^2 - \epsilon m + 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m = 3 & (\text{ریشه مضاعف}) \\ m^2-m+4 = \Delta - \Delta m \Rightarrow m^2 + 4m - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m برابر $3(-1) = -3$ است.

(ماز: ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m عبارت است از: $y - y_1 = m(x - x_1)$

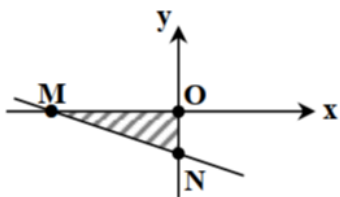
نکته: دو خط غیر موازی با محورهای مختصات، زمانی بر هم عمودند که حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر -1 باشد.

ابتدا معادله عمودمنصف پاره خط AB را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{مختصات وسط پاره خط } AB: M = \left(\frac{10+6}{2}, \frac{-16+0}{2} \right) = (8, -8) \\ \text{شیب عمودمنصف } AB: m' = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط AB به صورت روبه‌رو است:

$$y + 8 = -\frac{1}{4}(x - 8) \Rightarrow 4y + 32 = -x + 8 \Rightarrow 4y + x = -24$$



$$\text{حال با قرار دادن } x=0 \text{ و } y=0, \text{ مختصات نقاط } M \text{ و } N \text{ را تعیین می‌کنیم:}$$

$$4y + x = -24: \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-6 \Rightarrow N(0, -6) \\ y=0 \Rightarrow x=-24 \Rightarrow M(-24, 0) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}(OM \times ON) = \frac{1}{2}(6 \times 24) = 72 \text{ در نتیجه مساحت مثلث } OMN \text{ برابر است با:}$$

(گزینه دو: ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳

نکته: سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0$ ($a > 0$)، دارای ماکزیمم (مینیمم) است که در رأس آن، یعنی نقطه‌ای به طول

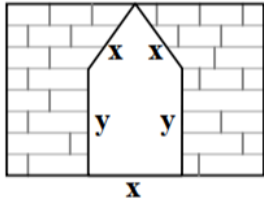
$$x = \frac{-b}{2a}$$

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

با توجه به اطلاعات سؤال، محیط پنجره برابر ۸ است، پس $3x + 2y = 8$ ؛ بنابراین: $y = \frac{8-3x}{2}$

اکنون با توجه به اینکه می‌خواهیم پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن ماکزیمم شود. رابطه مساحت آن به صورت زیر است:



$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

↑
مساحت مثلث
↓
مساحت مستطیل

اکنون با جایگذاری $y = \frac{8-3x}{2}$ خواهیم داشت:

$$S(x) = x \left(\frac{8-3x}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) x^2 + 4x$$

بنابراین طول نقطه ماکزیمم این سهمی برابر است با:

$$x = \frac{-4}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right)} = \frac{-4}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} = \frac{-8}{\sqrt{3} - 6} \times \frac{\sqrt{3} + 6}{\sqrt{3} + 6} = \frac{-8(\sqrt{3} + 6)}{-33} = \frac{8}{33} (\sqrt{3} + 6)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴

نکته: برای حل یک معادله گویا، ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. سپس معادله حاصل را حل می‌نماییم. در پایان، قابل قبول بودن هر یک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

نکته: اگر با سرعت v کیلومتر بر ساعت، به مدت t ساعت حرکت کنیم، مسافت طی شده برابر $x = v \cdot t$ کیلومتر است.

با توجه به نکته بالا، در مسیر رفت داریم:

$$60 = v \times t_1 \Rightarrow \text{مدت زمان رفت } t_1 = \frac{60}{v}$$

در مسیر بازگشت، سرعت متوسط برابر $(v-10)$ است، پس:

$$60 = (v-10) \times t_2 \Rightarrow \text{مدت زمان برگشت } t_2 = \frac{60}{v-10}$$

طبق فرض داریم:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2v(v-10)} 120v = 120(v-10) + v(v-10) \Rightarrow \cancel{120v} = \cancel{120v} - 1200 + v^2 - 10v$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0 \Rightarrow v = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4800}}{2} = \frac{10 \pm 70}{2} \Rightarrow \begin{cases} v = -30 < 0 \\ v = 40 \end{cases} \text{ غرق}$$

بنابراین $v = 40$ ، پس طول زمان رفت برابر است با:

$$t_1 = \frac{60}{v} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} = 1/5 \text{ ساعت}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۵

مختصات نقطه A را به شکل $A(x, y)$ در نظر می‌گیریم. شیب AB معکوس و قرینه شیب BC است.

$$m_{BC} = \frac{2-0}{5-2} = \frac{2}{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y-2}{x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{x-5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y-2 = -\frac{3}{2}(x-5) \quad (I)$$

ضمناً می‌دانیم $|AB| = |BC|$ ، پس:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 13 \xrightarrow{(I)} (x-5)^2 + \left(-\frac{3}{2}(x-5)\right)^2 = 13 \Rightarrow \frac{13}{4}(x-5)^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 = 4 \rightarrow x-5 = \pm 2 \Rightarrow x = 7, 3 \xrightarrow{x < 5} x = 3 \xrightarrow{(I)} y = 5 \Rightarrow A(3, 5) \Rightarrow x_A + y_A = 8$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶

نکته: فاصله دو نقطه A و B برابر است با: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

نکته: برای حل معادلات رادیکالی، ابتدا با کمک توان‌رسانی رادیکال(ها) را حذف می‌کنیم. سپس معادله حاصل را حل می‌نماییم. در پایان، قابل قبول بودن هر یک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

اگر نقطه موردنظر را $C(a, 0)$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$AC = 2BC \Rightarrow \sqrt{(a-5)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{(a-2)^2 + (0-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 10a + 29} = 2\sqrt{a^2 - 4a + 5}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 - 10a + 29 = 4(a^2 - 4a + 5)$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 29 = 4a^2 - 16a + 20 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$



بنابراین بیشترین مقدار فاصله نقطه موردنظر از مبدأ مختصات برابر ۳ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

نکته: معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha \beta = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ S + P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

(I) (II)

$$(I) \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Delta < 0 \quad \text{قابل قبول نیست.}$$

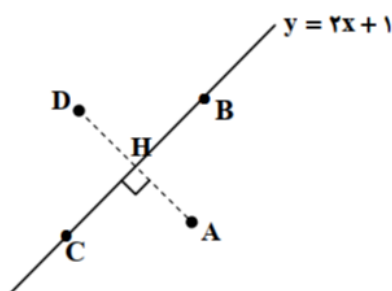
$$(II) \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Delta > 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

نکته: دو خط غیر موازی محورهای مختصات با شیب‌های m و m' وقتی بر هم عمودند که داشته باشیم: $mm' = -1$

اگر قرینه نقطه A را نسبت به پاره خط BC پیدا کنیم، مختصات D به دست می‌آید.



$$m_{BC} = 2 \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AH: y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\xrightarrow{(3, -3) \text{ روی خط است}} -3 = -\frac{1}{2}(3) + b \Rightarrow b = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

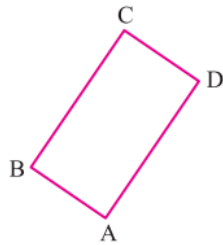
برای یافتن مختصات نقطه H از حل دستگاه معادلات زیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -1, \quad y = -1 \Rightarrow H(-1, -1)$$

نقطه H وسط دو نقطه A و D است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 2x_H - x_A = -2 - 3 = -5 \\ y_H = \frac{y_A + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2y_H - y_A = -2 + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-5, 1)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول: ابتدا شیب پاره خط AB را محاسبه می کنیم:

$$m_{AB} = \frac{2 - (-2)}{-3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

چون پاره خط AD بر AB عمود است، پس داریم:

$$m_{AD} = \frac{-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

معادله ضلع AD: $y - (-2) = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 2$

بنابراین مختصات نقطه D را می توان به صورت $D(\alpha, \frac{3}{4}\alpha - 2)$ در نظر گرفت.

گام دوم: به کمک محاسبه طول ضلع AB و مساحت مستطیل، طول ضلع AD را پیدا می کنیم:

$$AB = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-2 - 2)^2} = 5$$

$S = AB \times AD \Rightarrow 50 = 5AD \Rightarrow AD = 10$ (مستطیل)

گام سوم: با توجه به مختصات نقاط A و D داریم:

$$AD = 10 \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\frac{3}{4}\alpha - 2 + 2)^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{16}\alpha^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{16}\alpha^2} = 10 \Rightarrow |\frac{5}{4}\alpha| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 8 \\ \frac{5}{4}\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = -8 \end{cases}$$

$$\alpha = 8 \Rightarrow y_D = \frac{3}{4} \times 8 - 2 = 4$$

$$\alpha = -8 \Rightarrow y_D = \frac{3}{4} \times (-8) - 2 = -8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 1 = 0$ را تعیین می کنیم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 7, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

گام دوم: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + mx + n = 0$ را با S' و P' نمایش دهیم، آن گاه داریم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 49 - 2 = 47$$

$$S' = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) + (\alpha^2 + \beta^2) = 50$$

$$P' = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \times (\alpha^2 + \beta^2) = 141$$

گام سوم: به کمک S' و P' ، معادله درجه دوم را می نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 50x + 141 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -50 \\ n = 141 \end{cases}$$

$$m + n = -50 + 141 = 91$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: هر یک از معادلات را به فرم معادله درجه دوم می نویسیم. چون a ریشه هر دو معادله است، پس در هر دو معادله

$$x - \frac{2m}{x} = -3 \xrightarrow{\times x} x^2 - 2m = -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 2m = 0$$

صدق می کند:

$$x - \frac{3m}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 - 3m = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3m = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3a - 2m = 0 \\ a^2 - 2a - 3m = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \Delta a + m = 0 \Rightarrow a = -\frac{m}{\Delta}$$

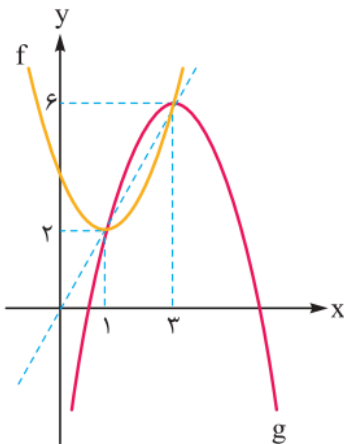
گام دوم: حاصل ضرب ریشه های هر یک از دو معادله را نوشته و مقدار a را برحسب m جای گذاری می کنیم:

$$\text{معادله اول: } ab = -2m \Rightarrow -\frac{m}{\Delta} \times b = -2m \Rightarrow b = 10$$

$$\text{معادله دوم: } ac = -3m \Rightarrow -\frac{m}{\Delta} \times c = -3m \Rightarrow c = 15$$

$$b + c = 10 + 15 = 25$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول: ابتدا با توجه به این که رأس های دو سهمی بر روی خط $y = 2x$ قرار دارد و از روی شکل داده شده، عرض رأس ها را داریم، طول رأس ها را پیدا می کنیم:

$$f \text{ تابع } 2x = 2 \Rightarrow x_S = 1 \Rightarrow f \text{ رأس } (1, 2)$$

$$g \text{ رأس } (3, 6) \text{ تابع } 2x = 6 \Rightarrow x_S = 3$$

گام دوم: می دانیم که معادله سهمی به صورت $y = a(x - x_S) + y_S$ نوشته می شود که (x_S, y_S) مختصات رأس و a عددی ثابت است. با توجه به این که مختصات رأس ها را داریم و هر سهمی از رأس سهمی دیگر گذشته است، ضابطه های f و g را می نویسیم:

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2 \xrightarrow{f \text{ از } (3, 6) \text{ می گذرد}} 6 = a(3 - 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = (x - 1)^2 + 2$$

$$g(x) = a'(x - 3)^2 + 6 \xrightarrow{g \text{ از } (1, 2) \text{ می گذرد}} 2 = a'(1 - 3)^2 + 6$$

$$\Rightarrow -4 = 4a' \Rightarrow a' = -1 \Rightarrow g(x) = -(x - 3)^2 + 6$$

$$g(0) = -(0 - 3)^2 + 6 = -3 \Rightarrow f(g(0)) = f(-3)$$

گام سوم: خواسته سؤال $f(g(0))$ است، در نتیجه:

$$= (-3 - 1)^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \Rightarrow f(g(0)) = 18$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: S و P یعنی $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ به دست می آوریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

گام دوم: α ریشه معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ است، آن را در معادله جای گذاری می کنیم:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha - 1$$

گام سوم: ریشه های معادله $x^2 + mx + n = 0$ ، اعداد $\alpha^2 - 1$ و $3\beta - 2$ هستند، طبق گام دوم $\alpha^2 = 3\alpha - 1$ ، پس:

$$x^2 + mx + n = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} 3\beta - 2, \alpha^2 - 1 \xrightarrow[\alpha^2 = 3\alpha - 1]{\text{ریشه ها}} 3\beta - 2, 3\alpha - 2$$

گام چهارم: دیدیم که ریشه های $x^2 + mx + n = 0$ برابر $3\alpha - 2$ و $3\beta - 2$ شدند. در این معادله P برابر است با $n = \frac{n}{1}$ ، در

گام اول هم دیدیم که $\alpha + \beta = 3$ و $\alpha\beta = 1$ ، در نتیجه:

$$P = n = (3\alpha - 2)(3\beta - 2) = 9\alpha\beta - 6\alpha - 6\beta + 4 = \underbrace{9\alpha\beta}_1 - 6(\underbrace{\alpha + \beta}_3) + 4 = 9 - 18 + 4 = -5 \Rightarrow n = -5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: به گفته سؤال $f(2-x) = f(2+x)$ ، پس طول رأس سهمی برابر می شود با $\frac{(2+x) + (2-x)}{2} = 2$ ، با توجه به فرمول طول رأس سهمی خواهیم داشت:

$$x_S = \frac{(2+x) + (2-x)}{2} \Rightarrow \frac{-2}{2a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

گام دوم: اختلاف دو ریشه یک سهمی از رابطه $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست می آید و نیز می دانیم که عدد طلایی $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است، می خواهیم اختلاف ریشه ها برابر عدد طلایی شود، پس:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4a(-c)} \frac{\sqrt{2^2 - 4(-\frac{1}{2})(-c)}}{|-\frac{1}{2}|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{4-2c} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-2c} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-2c = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow 2c = \frac{-6-2\sqrt{5}+64}{16} = \frac{58-2\sqrt{5}}{16}$$

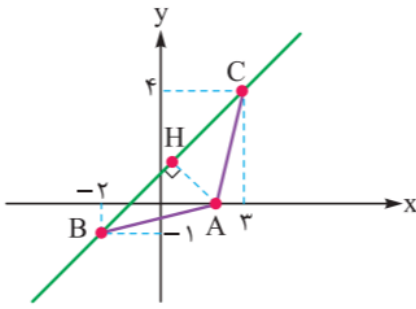
$$\Rightarrow c = \frac{29-\sqrt{5}}{16}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۵

35

گام اول: ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:



گام دوم: با توجه به شکل، برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC نیاز به اندازه ارتفاع AH داریم. چون $\triangle ABC$ متساوی الساقین است، پس AH هم ارتفاع هم عمود منصف و هم میانه است؛ در نتیجه:

$$H = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AH} = -1$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow AH: y = -x + 2$$

گام چهارم: با توجه به این که رأس A روی محور x و خط AH قرار دارد، پس:

$$0 = -x + 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

گام پنجم: حال اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله نقطه A از خط $x - y + 1 = 0$ و فاصله دو نقطه B و C را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{|2 - 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ BC &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{15}{2} = 7.5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: دو ضلع مقابل مستطیل با هم موازی اند؛ پس:

$$2a - 1 = a \Rightarrow a = 1$$

گام دوم: معادله دو ضلع مقابل به صورت $L_1: y = x - b$ و $L_2: y = x + 4$ است و مختصات رأس B در یکی از این دو خط

باید صدق کند:

$$B \notin L_2 \Rightarrow B \in L_1 \Rightarrow 2 = 1 - b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow L_1: y = x + 1$$

گام سوم: فاصله این دو خط موازی برابر طول (عرض) مستطیل است:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

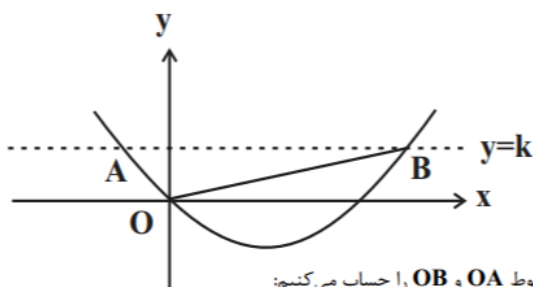
گام چهارم: به کمک مقدار محیط مستطیل، اندازه عرض (طول) آن را مشخص می کنیم و مساحت آن را به دست می آوریم:

$$2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \text{عرض}\right) = 10\sqrt{2} \Rightarrow \text{عرض} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۹

نقاط $A(x_1, k)$ و $B(x_2, k)$ را روی شکل زیر در نظر بگیرید. x_1 و x_2 طول نقاط تلاقی خط و سهمی یا جوابهای معادله $x^2 - 2x - k = 0$ هستند. حال شیب خطوط OA و OB را حساب می‌کنیم:

$$m_{OA} = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{k}{x_1} \quad m_{OB} = \frac{y_O - y_B}{x_O - x_B} = \frac{k}{x_2}$$

مثلث O قائمه است، پس دو خط بر هم عمودند یعنی شیبها قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$\frac{k}{x_1} \times \frac{k}{x_2} = -1 \Rightarrow \frac{k^2}{-k} = -1 \Rightarrow k = 1$$

در مثلث OAB ، قاعده مثلث $|x_2 - x_1|$ و ارتفاع آن k است؛ پس داریم:

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{2\sqrt{2} \times 1}{2} = \sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰

محل تلاقی قطرهای دایره، مختصات مرکز دایره را می‌دهند:

$$\begin{cases} 2x + 2ay = 6 \\ x - ay = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} 2x + 2ay = 6 \\ -2x + 2ay = -2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{a}, x = 2 \xrightarrow{\text{مرکز دایره}} O(2, \frac{1}{a})$$

حالا می‌دانیم شیب خط مماس بر دایره قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط A و O است.

$$O(2, \frac{1}{a}) \quad A(4, 4) \rightarrow m_{OA} = \frac{4 - \frac{1}{a}}{4 - 2} = \frac{4 - \frac{1}{a}}{2} \quad \text{شیب خط مماس } m_L = -\frac{3}{2} \xrightarrow{OA \perp L} \frac{4 - \frac{1}{a}}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow 4 - \frac{1}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{3}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱

رأس B مستطیل روی این دو ضلع قرار ندارد. پس این دو ضلع مجاورند و بنابراین برهم عمود هستند:

$$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow 2 \times (-a) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

حالا طول و عرض مستطیل برابر با فاصله B از این خطها هستند:

$$B(2, -1) \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 1 \end{array} \right. \quad m = \frac{|4 - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad n = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

پس:

$$S = mn = \frac{8}{5} = 1,6$$

(دباز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۲

از نقطه $A(1, -2)$ بر خط عمود می‌کنیم:

$$m = 2 \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

تصویر نقطه A روی خط $y = 2x - 1$ در محل برخورد این دو خط است:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ 2y = 4x - 2 \end{cases} \Rightarrow 5y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

نقطه $H(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$ وسط A, B است؛ پس:

$$B = 2H - A$$

$$= (-\frac{2}{5} - (1), -\frac{14}{5} - (-2)) = (-\frac{7}{5}, -\frac{4}{5})$$

پس:

$$\beta\alpha = \frac{28}{25} = 1/12$$

(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۳

باتوجه به طول اضلاع $AB = \sqrt{20}$ ، $AC = \sqrt{29}$ و $BC = \sqrt{17}$ کوتاه‌ترین ارتفاع روی ضلع AC فرود می‌آید؛ یعنی ارتفاع BH پس فاصله رأس B از AC را حساب می‌کنیم:

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2}$$

$$AC \text{ معادله: } 2y - 5x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{B(2,0)} BH = \frac{|2(0) - 5(3) - 3|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{29}}$$

(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۴

$$y = -\frac{1}{4}x + \alpha \Rightarrow 2y + x - 2\alpha = 0$$

$$\text{فاصله مبدأ} = \frac{|2\alpha|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 10 \rightarrow \alpha = 5 \\ 2\alpha = -10 \rightarrow \alpha = -5 \end{cases}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y = -\frac{1}{4}x + 5 \rightarrow A|_5^0, B|_0^{10} \rightarrow AB = \sqrt{125}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - 5 \rightarrow A|_{-5}^0, B|_0^{-10} \rightarrow AB = \sqrt{125}$$

۴۵

در واقع قرار است خط داده شده عمودمنصف نقطه $A(4, k)$ و $B(0, m)$ باشد.

$$y = 2x - 1 \Rightarrow \text{شیب} = 2 \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = -\frac{1}{2}$$

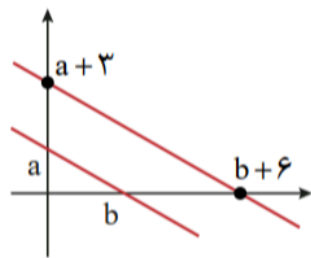
$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k-m}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m-k=2$$

از طرفی وسط دو نقطه A و B در معادله خط صدق می‌کند، پس:

$$A \text{ و } B \text{ وسط} \left| \frac{m+k}{2} \Rightarrow \frac{m+k}{2} = 4-1 \Rightarrow m+k=6 \right.$$

$$\begin{cases} m+k=6 \\ m-k=2 \end{cases} \Rightarrow m=4, k=2$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y = \frac{-a}{b}x + a \rightarrow \left| \frac{1}{2} \right| \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-a}{b} + a \rightarrow \frac{a}{b} = a - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a}{a - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{a+3}{b+6} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a+3}{\frac{a}{a - \frac{1}{2}} + 6} = a - \frac{1}{2} \rightarrow a + 3 = a + 6a - 12 \rightarrow a = \frac{5}{7} \text{ و } b = 5$$

$$y = \frac{-a}{b}x + a + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7} \rightarrow \left| \frac{3}{4} \right|$$

۴۶

با توجه به فرض مسئله $A(1, -4)$ ، $B(-3, -1)$ ، $C(x, y)$ و $D(1-x, y-3)$ هستند و داریم:

۴۷



$$AB \parallel DC \Rightarrow m_{AB} = m_{DC} \Rightarrow \frac{-1+4}{-3-1} = \frac{y-3-y}{1-x-x} \Rightarrow \frac{3}{-4} = \frac{-3}{1-2x}$$

$$\Rightarrow 1-2x = 4 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow C(-\frac{3}{2}, y), D(\frac{5}{2}, y-3)$$

$$BA \perp BC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{-1+4}{-3-1} \times \frac{y+1}{-\frac{3}{2}+3} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{-4} \times \frac{2(y+1)}{3} = -1 \Rightarrow \frac{y+1}{2} = 1 \Rightarrow y+1=2 \Rightarrow y=1$$

اکنون طول AB و BC را محاسبه می‌کنیم:

$$A(1, -4), B(-3, -1) \Rightarrow AB = \sqrt{(1+3)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$B(-3, -1), C(-\frac{3}{2}, 1) \Rightarrow BC = \sqrt{(-3+\frac{3}{2})^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(AB + BC) = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

$$\text{مساحت مستطیل} = AB \times BC = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

پس اختلاف مساحت و محیط مستطیل برابر ۲/۵ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

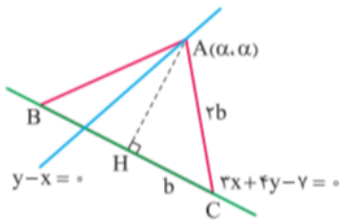
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

نکته ارتفاع و مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از روابط مقابل به دست می‌آید:

گام اول: طول هر ضلع مثلث را برابر $2b$ در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه A از خط $3x + 4y - 7 = 0$ برابر است با ارتفاع مثلث، پس:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} (2b) \Rightarrow h = \sqrt{3}b$$

پس فاصله نقطه A از خط $3x + 4y - 7 = 0$ برابر با $\sqrt{3}b$ است.



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

گام دوم: نقطه A روی خط $y = x$ یا $y - x = 0$ قرار دارد، پس مختصات آن را (α, α) در نظر می‌گیریم و فاصله نقطه A تا خط $3x + 4y - 7 = 0$ را برحسب α می‌نویسیم و آن را برابر $\sqrt{3}b$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{3}b = d \xrightarrow{A(\alpha, \alpha)} \sqrt{3}b = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|7\alpha - 7|}{5} \Rightarrow \sqrt{3}b = \frac{7|\alpha - 1|}{5} \Rightarrow b = \frac{7|\alpha - 1|}{5\sqrt{3}}$$

گام سوم: مساحت مثلث برابر است با $\frac{147\sqrt{3}}{25}$ ، با توجه به رابطه مساحت مثلث متساوی الاضلاع خواهیم داشت:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2b)^2 \Rightarrow \frac{147\sqrt{3}}{25} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4b^2) \Rightarrow b^2 = \frac{147}{25} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{147}}{5}$$

$$\xrightarrow{b>0} b = \frac{\sqrt{147}}{5} = \frac{\sqrt{3 \times 49}}{5} = \frac{7\sqrt{3}}{5} \xrightarrow{b = \frac{7|\alpha-1|}{5\sqrt{3}}} \frac{7|\alpha-1|}{5\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{5}$$

$$\Rightarrow |\alpha - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 4 \\ \alpha - 1 = -3 \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

گام چهارم: فاصله نقطه $A(\alpha, \alpha)$ تا مبدأ را با $\alpha = 4$ و $\alpha = -2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = 4 \Rightarrow A(4, 4) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32}$$

$$\alpha = -2 \Rightarrow A(-2, -2) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8}$$

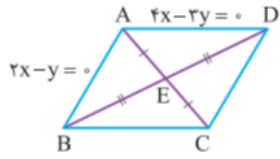
پس نزدیک‌ترین فاصله A تا مبدأ برابر $\sqrt{8}$ است که همان $2\sqrt{2}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: فرض می‌کنیم معادله خط AB ، $2x - y = 0$ و معادله خط AD ، $4x - 3y = 0$ باشد؛ رأس A محل تلاقی این دو خط است، پس:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

گام دوم: مرکز را E می‌نامیم و فاصله AE را پیدا می‌کنیم:



$$\xrightarrow[A(0,0)]{E(2,1)} AE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = 2\sqrt{2}$$

طول قطر AC ، دو برابر AE است، پس $AC = 4\sqrt{2}$.

گام سوم: نقطه D روی خط $4x - 3y = 0$ قرار دارد، آن را به صورت $(\alpha, \frac{4\alpha}{3})$ می‌نویسیم و به همین ترتیب B را به صورت $(\beta, 2\beta)$ می‌نویسیم. نقطه E وسط BD قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} x_E = \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \\ y_E = \frac{\frac{4\alpha}{3} + 2\beta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{4\alpha}{3} + 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 8 \\ \frac{4\alpha}{3} + 2\beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله پایینی را از بالایی کم می‌کنیم.}} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 8 \\ 2\alpha - \frac{4\alpha}{3} = 4 - 4 \Rightarrow \frac{2\alpha}{3} = 4 \Rightarrow \alpha = 6 \end{cases}$$

حالا $\alpha = 6$ را در یکی از معادلات بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا β به دست بیاید:
پس $D(6, 8)$ و $B(-2, -4)$.

گام چهارم: طول BD را به دست می‌آوریم:
در گام دوم نیز طول AC را پیدا کردیم که برابر $4\sqrt{2}$ شد، پس بزرگ‌ترین قطر BD است که طولش $4\sqrt{13}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا معادله خطی که ضلع AD روی آن قرار دارد را می‌نویسیم، شیب این خط قرینه و معکوس شیب خط $y = 3x + 1$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m = \frac{-1}{3}]{D(-6, 3)} y - 3 = \frac{-1}{3}(x + 6) \Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + 1$$

گام دوم: رأس A ، محل تلاقی خط‌های $y = 3x + 1$ و $y = \frac{-1}{3}x + 1$ است، پس:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \frac{-1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3x + 1 = \frac{-1}{3}x + 1 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله یکی از خطوط}} y = 1$$

پس $A(0, 1)$ است.

گام سوم: فاصله $A(0, 1)$ و $D(-6, 3)$ از یکدیگر را به دست می‌آوریم که طول ضلع مربع است:

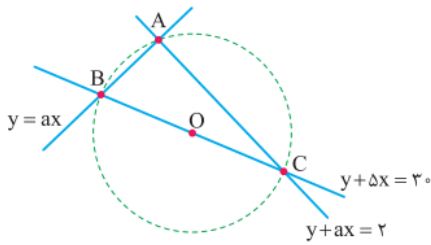
$$AD = \sqrt{(-6-0)^2 + (3-1)^2} \Rightarrow AD = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

گام چهارم: رأس B روی خط $y = 3x + 1$ قرار دارد، پس مختصات آن را به صورت $(\alpha, 3\alpha + 1)$ در نظر می‌گیریم و فاصله آن تا A را برابر $\sqrt{40}$ (طول ضلع مربع) قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (3\alpha+1-1)^2} = \sqrt{40} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 9\alpha^2} = \sqrt{40} \Rightarrow \sqrt{10\alpha^2} = \sqrt{40} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 10\alpha^2 = 40 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

به ازای $\alpha = 2$ ، مختصات B برابر $(2, 7)$ و به ازای $\alpha = -2$ ، مختصات B برابر $(-2, -5)$ است. پس مجموع عرض‌های ممکن برای B برابر است با:
 $-5 + 7 = 2$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: اگر به صورت سؤال دقت کنید، می بینید که مرکز دایره و B و C بر روی خط $y + \Delta x = 3^\circ$ قرار دارند، این یعنی میانه وارد بر BC از رأس A، نصف BC است، پس مثلث ABC قائم الزاویه است و رأس A قائمه است.

گام دوم: با توجه به گام اول شیب دو خط $y = ax$ و $y + ax = 2$ قرینه و معکوس یکدیگرند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} y + ax = 2 \Rightarrow y = -a x + 2 \xrightarrow{\text{شیب}} -a \\ y = a x \xrightarrow{\text{شیب}} a \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} a(-a) = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

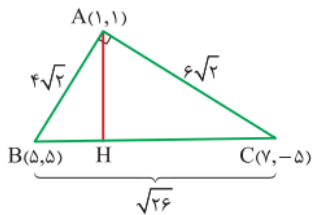
گام سوم: $a = 1$ را در معادله خطوط اولیه جای گذاری می کنیم و از تلاقی آن ها رأس A را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x = 1, y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

گام چهارم: حال مختصات B و C را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y = x \\ y + \Delta x = 3^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} B(\Delta, \Delta) \quad \begin{cases} y + x = 2 \\ y + \Delta x = 3^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} C(7, -5)$$

گام پنجم: طول اضلاع مثلث را محاسبه می کنیم و شکل آن را رسم می کنیم:



$$AB = \sqrt{(\Delta - 1)^2 + (\Delta - 1)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-5 - 1)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(7 - \Delta)^2 + (-5 - \Delta)^2} = 2\sqrt{26}$$

گام ششم: از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= CH \times CB \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = CH \times (2\sqrt{26}) \quad (2) \xrightarrow{\frac{(2)}{(1)}} \frac{CH \times (2\sqrt{26})}{BH \times (2\sqrt{26})} = \frac{36 \times 2}{16 \times 2} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{9}{4} = 2/25 \\ AB^2 &= BH \times BC \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = BH \times (2\sqrt{26}) \quad (1) \end{aligned}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

چون در دوزنقه، قاعده ها با هم موازیند، پس داریم:

$$y = \sqrt{3}x + 2 \quad my = 3x - 6 \quad \text{شرط موازی بودن: } \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله دو خط موازی به صورت $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ خواهد بود که فاصله دو خط موازی برابر طول ارتفاع دوزنقه است، یعنی داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \\ \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

توجه شود که ضرایب x و y را در دو معادله، برابر کرده ایم تا از فرمول فاصله دو خط موازی استفاده کنیم:

$$d = \frac{|2 + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

پس طول ارتفاع دوزنقه $h = 1 + \sqrt{3}$ است.

$$S = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{(\sqrt{12} - 2 + \sqrt{27} - 3) \times (1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5)(1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{5 \times 2}{2} = 5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

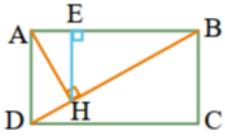
در مثلث قائم‌الزاویه ABD طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 192 + 64 \Rightarrow BD^2 = 256 \Rightarrow BD = 16$$

همچنین در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 = BD \cdot BH \Rightarrow 192 = 16 \times BH \Rightarrow BH = 12$$

حال اگر از نقطه H عمود HE را بر ضلع AB رسم کنیم داریم:



$$EH \parallel AD \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{HE}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HE}{8} = \frac{12}{16} \Rightarrow HE = 6$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)